Diskussion.

Schweidler (Wien): Ist dem Vortragenden bekannt, dass die starke Absorbierbarkeit dieser Strahlen, die demonstriert wurde, in völliger Übereinstimmung ist mit der Absorbierbarkeit der Strahlen, die von dem Polonium der Curies ausgesandt werden.

Marckwald: Die Frage, ob mein Ausgangsmaterial identisch ist mit dem Polonium der Curies, ist ja schwer zu entscheiden. Der ganze Unterschied besteht darin, dass die Curies angeben, dass ihre Substanz die Wirksamkeit nach einiger Zeit verloren hat. Noch in ihrer letzten Veröffentlichung schreiben sie wörtlich: le polonium n'est qu'une espèce de bismut actif. Diese Substanz dagegen hat bis jetzt wenigstens, also im Laufe von 8—9 Monaten, keine Spur ihrer Aktivität eingebüsst.

Warburg (Berlin): Nach meiner Erinnerung hat das Polonium der Curies sehr stark absorbierbare Strahlen ausgesendet. Ferner haben, soviel ich weiss, die Curies keine magnetische Ablenkbarkeit an ihren Präparaten feststellen können, Herr Giesel dagegen hat eine solche gefunden. Es scheinen also verschiedene Arten von Polonium zu existieren.

W. Kaufmann (Göttingen), Die elektromagnetische Masse des Elektrons.

Auf der vorjährigen Naturforscherversammlung in Hamburg[1]) konnte ich Ihnen über Versuche berichten, aus denen hervorging, dass das Verhältnis ε/μ der Becquerelstrahlen mit zunehmender Geschwindigkeit abnähme, also wenn man ε als konstant betrachtet, μ zunähme und zwar um so rascher, je mehr sich die Geschwindigkeit (q) der Lichtgeschwindigkeit (c) nähert. Ein derartiges Verhalten ergiebt sich theoretisch aus der Gleichung für die Energie einer schnell bewegten elektrischen Ladung. Es glückte damals auch, die Resultate mit einer von Herrn Searle[2]) abgeleiteten theoretischen Formel in Einklang zu bringen; jedoch nur unter der Annahme, dass der grösste Teil der Masse des bewegten Elektrons mechanischen, der Rest elektromagnetischen Ursprungs sei. Bald nach Veröffentlichung der damaligen Versuche zeigte jedoch Herr M. Abraham[3]), dass die Searlesche Formel für die Feldenergie des bewegten Elektrons die elektromagnetische Masse nur im Falle einer Beschleunigung in Richtung der Bewegung ohne weiteres zu berechnen gestatte, dass dagegen bei transversaler Beschleunigung, wie sie bei meinen Versuchen vorlag, ein von der Searleschen Formel abweichender Ausdruck für die Masse gilt. Ist $\beta = q/c$, ε die Ladung des Elektrons in E. M. E. μ_0 [1]) der Wert der elektromagnetischen Masse für kleine Geschwindigkeiten, so ist nach Abraham:

$$1)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\mu_0}\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{\psi(\beta)}$$

wobei

$$2)\qquad \psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1+\beta^2}{2\beta}\,ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right],$$

(für $\beta = 0$ wird $\psi(\beta) = 4/3$; für $\beta = 1$ wird $\psi(\beta) = \infty$).

Eine bereits von Herrn Abraham versuchte Vergleichung meiner Versuchsresultate mit seiner Formel ergab keine gute Übereinstimmung, die Masse änderte sich schneller als die Theorie verlangte, sodass eine etwa hinzugefügte mechanische Masse hätte negativ angesetzt werden müssen.

Im folgenden soll nun ein rationellerer Wert zur Auswertung der Resultate gezeigt und zugleich an der Hand neuen Versuchsmaterials die völlige Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie nachgewiesen werden.

Bei den damaligen Berechnungen wurden nämlich die absoluten Werte von q und ε/μ unter Benutzung der absoluten Werte des elektrischen und magnetischen Feldes bestimmt, wobei schon damals die möglichen Fehler zu etwa 5 Proz. geschätzt wurden, Fehler, die viel grösser sind, als die relativen Fehler bei Ausmessung der Platten.

Wegen der grossen Veränderlichkeit von $\psi(\beta)$ für β nahezu gleich 1 bedeutet aber ein kleiner Fehler von β einen sehr grossen von μ (für $\beta = 0{,}96$ resp. $0{,}98$ ist z. B. $\psi(\beta) = 3{,}141$ resp. $3{,}745$, d. h. einem Fehler in der Bestimmung von β von 2 Proz. entspricht ein Fehler von μ im Betrage von 19 Proz.).

Zu einer rationellen Verwertung der auf der Platte ausgemessenen Kurve gelangt man also nur, indem man die Relativwerte miteinander vergleicht; man darf die Konstanten der Kurve nicht direkt durch Messung der Apparatdimensionen und des Feldes bestimmen, sondern muss nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte ermitteln.

Es seien y resp. z, die auf der Platte gemessenen elektrischen resp. magnetischen Ablenkungen. Aus diesen lassen sich zwei andere Grössen η resp. ζ ableiten, die in einfacher Beziehung zu ε/μ resp. q stehen. Die η und ζ sind den y und z angenähert proportional; die Abweichungen von der Proportionalität lassen

---

1) Verhdl. D. Naturf. u. Ärzte Hamburg 1901. II. 1. 45. Gött. Nachr. 1901. H. 2.
2) Phil. Mag (5) 44. 340, 1897.
3) Gött. Nachr. 1902. H. 1.

1) Ist a der Radius des Elektrons, so ist $\mu_0 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{a}$ bei Annahme von Flächenladung.

Tabelle I.

z cm	y cm	β	$\psi(\beta)$	k_2	δ Proz.	
0,348	0,0839	0,957	3,08	2,16	−0,6	$k_1 = 0{,}532$
0,461	0,1175	0,907	2,49	2,165	−0,4	
0,576	0,1565	0,847	2,13	2,20	+1,2	$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{3}} = \pm 0{,}8$ Proz.
0,688	0,198	0,799	1,96	2,165	−0,4	
			Mittel:	2,173		

Tabelle II.

z cm	y cm	β	$\psi(\beta)$	k_2	δ Proz.	
0,200	0,0241	0,930	2,69	[2,19][1]	[+17,5]	
0,250	305	0,917	2,56	1,87	+ 0,4	
0,300	382	0,875	2,26	1,855	− 0,4	$k_1 = 0{,}260$
0,350	469	0,831	2,065	1,845	− 1,0	$\varepsilon = \pm 1{,}0$ Proz.
0,400	574	0,777	1,89	1,895	+ 1,7	
0,450	688	0,730	1,78	1,864	+ 0,05	
0,525	856	0,684	1,695	1,850	− 0,7	
			Mittel:	1,863		

1) Zur Berechnung des Mittelwertes nicht benutzt, weil offenbar durch Plattenfehler oder andere Störungen verfälscht.

Tabelle III.

z cm	y cm	β	$\psi(\beta)$	k_2	δ Proz.	
0,35	0,0455	0,851	2,147	1,721	−0,1	
0,45	651	0,766	1,86	1,736	+0,7	$k_1 = 0{,}258$
0,50	760	0,727	1,78	1,725	+0,1	$\varepsilon = \pm 1{,}2$ Proz.
0,60	0,1000	0,6615	1,66	1,727	+0,2	
0,70	0,1230	0,6075	1,595	1,655[2]	−3,9[2]	
			Mittel:	1,723		

2) Bei Berechnung des Mittels mit $^1/_4$ Gewicht eingeführt wegen grösserer Ungenauigkeit der Einzeleinstellungen; Punkt liegt am äussersten sichtbaren Ende der Kurve.

Tabelle IV.

z cm	y cm	β	$\psi(\beta)$	k_2	δ Proz.	
0,150	0,0607	0,963	3,23	8,12	+0,4	
175	720	949	2,86	7,99	−1,2	
200	835	933	2,73	(?) 7,46	[−7,8]	
225	991	883	2,31	8,32	+2,8	
250	0,1132	860	2,195	8,09	±0	$k_1 = 0{,}905$
275	1290	830	2,06	8,13	+0,5	$\varepsilon = \pm 1{,}4$ Proz.
300	1455	801	1,96	8,13	+0,5	
325	1630	777	1,89	8,04	−0,6	
350	1813	752	1,83	8,02	−0,9	
375	1988	732	1,785	7,97	−1,5	
			Mittel:	8,09		

sich durch Korrektionsglieder darstellen, die von den Apparatdimensionen abhängen, so dass selbst ziemlich beträchtliche Fehler in der Bestimmung der letzteren die Resultate wenig beeinflussen.[1])

Es bezeichne: F die Intensität des elektrischen, H die Intensität des magnetischen Feldes k_1 und k_2 zwei Konstanten; so ist:

$$4)\qquad q = c\beta = \frac{F}{H}\frac{\zeta}{\eta} = k_1 c\frac{\zeta}{\eta},$$

1) Über Einzelheiten der Rechnung s. a. W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1902. H. 5. (Doch ist dort die Rechnung in etwas abweichender Weise durchgeführt.)

$$5)\qquad \beta = k_1\frac{\zeta}{\eta},$$

$$6)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\zeta^2}{\eta}\frac{F}{H^2},$$

sodass unter Berücksichtigung von 1):

$$7)\qquad \frac{\eta}{\zeta^2\psi(\beta)} = \frac{k_1 c}{H}\frac{3}{4}\frac{\mu_0}{\varepsilon} = k_2$$

oder

$$8)\qquad \frac{\eta}{\zeta^2\psi\left(k_1\frac{\zeta}{\eta}\right)} = k_2.$$

Gleichung 8) stellt also die Gleichung (η, ζ)-Kurve dar, die aus der direkt gemessenen (y, z)-Kurve durch eine einfache Umformung erhalten ist.

Es entsteht also die Aufgabe, die Konstante k_1 mittels der Methode der kleinsten Quadrate so zu bestimmen, dass der Quotient auf der linken Seite von 8) möglichst konstant wird; ist $\overline{k_2}$ der Mittelwert sämtlicher gefundenen k_2, so muss also

9) $$\Sigma \delta^2 = \Sigma (k_2 - \overline{k_2})^2,$$

zu einem Minimum gemacht werden. Wegen der komplizierten Form von $\psi\left(k_1 \frac{\zeta}{\eta}\right)$ kann dies nur durch Ausprobieren geschehen; nach einiger Übung findet man passende Werte von k_1 sehr bald und zwar leicht auf $^1/_2$ Proz. genau.

Ich teile am Schlusse einige Messungsergebnisse mit.

Tabelle I bezieht sich auf meine alten Beobachtungen, bei denen ein leider damals untergelaufener Rechenfehler, auf den Herr E. Gehrke mich freundlichst aufmerksam machte, beseitigt ist. Tabelle II, III und IV enthalten neue Beobachtungen von bedeutend grösserer Schärfe[1]), die ich kürzlich gemacht habe, mit gütiger Unterstützung von Herrn und Frau Curie, die mir eine kleine Quantität ihres ungemein wertvollen reinen Radiumchlorids zur Verfügung stellten. Die enorme Aktivität dieses Präparates erlaubte die Anwendung sehr kleiner Körnchen als Strahlungsquelle und eines entsprechend feinen Diaphragmas, so dass die Kurven bedeutend feiner wurden als früher und sogar die blosse Spannung der Hochspannungsbatterie (circa 2000 Volt) schon ausreichte, um eine hinreichende Trennung der beiden Äste zu bewirken. Es sind die Kurven II und III mit der Spannung von 2000 Volt aufgenommen, bei Kurve IV wurde durch den l. c. beschriebenen rotierenden Umschalter die Spannung auf etwa 5000 Volt gesteigert. Die Übereinstimmung mit der Theorie ist so gut, als es die Beobachtungsgenauigkeit nur erwarten lässt, da der mittlere Fehler der Einzelwerte bei sämtlichen vier Kurven nur 1 bis 1,4 Proz. beträgt.

Kennt man den Absolutwert von H, so kann man nach Gl. 7 auch ε/μ_0 ermitteln. Ich habe bei den neuen Versuchen H noch nicht gemessen, bei den alten Versuchen (Tab. I) war $H = 299$, woraus sich ergiebt

10) $$\varepsilon/\mu_0 = 1{,}84 \cdot 10^7$$

in guter Übereinstimmung mit dem für Kathodenstrahlen gefundenen Werte

11) $$\varepsilon/\mu = 1{,}865 \cdot 10^7.$$

Berechnet man für die Versuche in Tab. I die Konstanten k_1 und k_2 aus den Apparatdimensionen, so findet man für k_1 einen um etwa 7,2 Proz. abweichenden Wert[1]), d. h. man erhält für die Geschwindigkeit der schnellsten Strahlen nicht die Lichtgeschwindigkeit, sondern $2{,}785 \cdot 10^{10}$.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass bei genügender Verfeinerung der Messungen diese Differenz verschwinden wird. Versuche in dieser Richtung sind im Gange.

Zusammenfassend lässt sich jetzt schon sagen, dass die Beobachtungen zu folgenden Schlüssen berechtigen:

Die Masse der die Becquerelstrahlen bildenden Elektronen ist von der Geschwindigkeit abhängig; die Abhängigkeit ist genau darstellbar durch die Abrahamsche Formel. Es ist demnach die Masse der Elektronen rein elektromagnetischer Natur.

Der für kleine Geschwindigkeiten berechnete Wert stimmt innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem für Kathodenstrahlen gefundenen überein.

1) Hier werden die Platten gezeigt.

1) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1902. H. 5.

(Selbstreferat des Vortragenden.)

Diskussion.

Meyer (Königsberg): Darf ich fragen, wie berechnet man die Funktion $\psi(\beta)$, theoretisch oder durch Messungen?

Kaufmann: Vielleicht ist es besser, wenn wir erst nach dem Vortrag von Abraham die Diskussion führen.

Abraham (Göttingen): Die theoretische Ableitung bringe ich ja; aber darüber können wir doch sprechen, inwieweit durch die Beobachtungen die von der Theorie verlangte Form der Funktion $\psi(\beta)$ bestätigt wird

Kaufmann: Die Vergleichung mit der Theorie erfolgt in erster Linie auf Grund der auf der Platte gemessenen Ablenkungen, indem die beiden von den Apparatdimensionen und Feldstärken abhängigen beiden Konstanten nicht durch absolute Messung, sondern empirisch nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Wenn man absolut bestimmt, kommt man zu einer Übereinstimmung viel schwerer, weil ein Fehler von 1 Proz. in der Bestimmung von β schon Fehler von 10 oder 20 Proz. für $\psi(\beta)$ giebt. Deshalb ist es nötig, dass man die relativen Werte miteinander vergleicht. Eine absolute Messung habe ich bisher nur für die ersten, älteren Versuche vom vorigen Jahre ausgeführt. Da bekommt man Abweichungen im Werte von k_1 bis zu 7 Proz. Rechnet man nun nach Korrektion dieser Abweichung daraus den Wert ε/μ_0 aus, so bekommt man den Wert $1 \cdot 84 \cdot 10^7$, während für die Kathodenstrahlen gefunden ist $1 \cdot 865 \cdot 10^7$.

Meyer: Ich möchte noch fragen wegen der Mängel der photographischen Platte, die kann man also daran erkennen, dass die Fehler immer an derselben Stelle und in derselben Grösse erfolgen?

Kaufmann: Diese Fehler sind fast immer da, systematisch, d. h. der Kurve wirklich angehörig sind sie aber nicht, da sie auf den einzelnen Platten an ganz verschiedener Stelle und verschieden nach Grösse und Sinn auftreten.

M. Abraham (Göttingen), Prinzipien der Dynamik des Elektrons.

Bereits im Januar dieses Jahres habe ich in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften eine Abhandlung über die Dynamik des Elektrons veröffentlicht. Die Übereinstimmung der dort entwickelten Theorie mit den experimentellen Resultaten des Herrn Kaufmann lässt die Annahmen, auf denen die Theorie beruht, als zweckmässig gewählt erscheinen; sie zeigt ferner, dass die Trägheit des Elektrons rein elektromagnetischer Natur ist. Während ich dort zunächst noch eine von der elektrischen Ladung unabhängige „materielle" Masse in den Bewegungsgleichungen mitführte, wird es jetzt notwendig, die Dynamik des Elektrons von vornherein elektromagnetisch zu begründen. Dabei ergeben sich bemerkenswerte Analogien der Prinzipien der Dynamik des Elektrons einerseits, der Prinzipien der gewöhnlichen Dynamik materieller Körper andererseits, Analogien, die für die künftige elektromagnetische Begründung der gesamten Mechanik von Bedeutung werden dürften.

Wir schreiben dem Elektron, dem Atome der negativen Elektrizität, eine Ladung e (elektrostatisch gemessen) zu. Das in den Kathoden- und Becquerelstrahlen bewegte freie Elektron sei — das nehmen wir an — eine Kugel vom Radius a, über deren Volumen die Elektrizität gleichförmig, mit der Dichte ϱ, verteilt ist. Die Elektrizität soll an den Volumelementen des Elektrons haften, wie die Materie an den Volumelementen eines starren Körpers, d. h. es soll für das Elektron die kinematische Grundgleichung gelten.

$$1)\qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{q} + [\vartheta\,\mathfrak{r}].$$

Die kinematische Grundgleichung bestimmt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes des Elektrons, dessen Abstand vom Mittelpunkt durch den Vektor $\mathfrak{r}$ angezeigt ist, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ des Mittelpunktes und die Drehgeschwindigkeit ϑ um den Mittelpunkt gegeben sind; wir schreiben sie in vektorieller Form, wobei wir das Grassmannsche Symbol des äusseren Produktes gebrauchen.

Das elektromagnetische Feld, das von dem Elektron erregt wird, ist bestimmt durch die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen:

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} &= curl\,\mathfrak{H} - \frac{4\pi\varrho}{c}\cdot\mathfrak{v}, \quad & div\,\mathfrak{E} &= 4\pi\varrho, \\ -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} &= curl\,\mathfrak{E}, \quad & div\,\mathfrak{H} &= 0. \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ bezeichnen dabei elektrische und magnetische Feldstärke, c die Lichtgeschwindigkeit.

Es ist hervorzuheben, dass die Lorentzsche Theorie mit absoluten Geschwindigkeiten rechnet.

Das Elektron befinde sich nun in einem gegebenen äusseren elektromagnetischen Felde, von den Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}_h$. Zur Bestimmung der Bewegungen, die es ausführt, ist noch ein drittes System von Grundgleichungen erforderlich, das System der „kinetischen" oder „dynamischen" Grundgleichungen. Bei der Aufstellung derselben lassen wir uns durch folgende Überlegung leiten. H. A. Lorentz und E. Wiechert haben gezeigt, dass man die Kräfte, welche auf ruhende und auf strömende Elektrizität im elektrischen bezw. im magnetischen Felde wirken, aus der Elektronentheorie ableiten kann, wenn man für die auf das einzelne Elektron wirkende Kraft den Ansatz macht:

$$\mathfrak{K} = e\cdot\mathfrak{F}_h \quad , \quad \mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{q}\mathfrak{H}_h].$$

Dabei wird das Elektron als Punktladung aufgefasst. Wir müssen die Volumelemente des Elektrons unterscheiden; demgemäss definieren wir die „äussere Kraft" durch

$$\mathfrak{K} = \int\!\!\int\!\!\int dv\,\varrho\cdot\mathfrak{F}_h\,,\quad \mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c}\cdot[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_h]$$

und führen ferner eine „äussere Drehkraft"

$$\Theta = \int\!\!\int\!\!\int dv\,\varrho\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}_h]$$

ein. Nach Maxwell und Hertz gilt nun aber das „Prinzip der Einheit der elektrischen und magnetischen Kraft"; diesem Prinzip zufolge ist die Unterscheidung eines „äusseren" und eines vom Elektron selbst erregten „inneren" Feldes eine künstliche; in Wahrheit giebt es nur ein Feld, von den Feldstärken

$$\mathfrak{E}_h + \mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{H}_h + \mathfrak{H}.$$

Dieses Prinzip führt uns dazu, dem Vektor

$$\mathfrak{F}_h = \mathfrak{E}_h + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_h]$$

den Vektor

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]$$

an die Seite zu stellen, und von einer „inneren Kraft"

$$\int\!\!\int\!\!\int dv\,\varrho\,\mathfrak{F}$$